



UNIVERSITÉ DE SFAX

NOVEMBRE 2024

★ ★ ★ ★ ★

Institut Préparatoire aux Etudes
D'ingénieurs de Sfax

Devoir de Contrôle d'Algèbre N°1

NB : L'usage de toute sorte de calculatrice et du portable est strictement interdit.

Section : MP1

Durée : 01H 30mn

N. de pages : 02

Exercice 1 (02 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer : $\prod_{k=2}^n \frac{k^2}{k^2 - 1}$.

Exercice 2 (06 pts)

On rappelle que $e^{i\pi} + 1 = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $(-1)^x = e^{i\pi x}$.

(1) Calculer $(-1)^{\frac{2025}{4}}$.

(2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les deux équations d'inconnu x suivantes :

(a) $(-1)^x = n$; $n \in \mathbb{Z}^*$.

(b) $(-1)^x = (-1)^a$; $a \in \mathbb{R}$.

(3) (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(-1)^x \cdot (-1)^y = (-1)^{x+y}$.

(b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $((-1)^x)^n = (-1)^{nx}$.

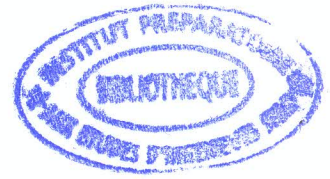
(c) Donner un exemple d'un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant que : $((-1)^x)^y \neq (-1)^{xy}$.

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\sum_{k=1}^n (-1)^{kx}$.

(b) Déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$.

(c) Calculer $\prod_{k=1}^n (-1)^{kx}$.



Exercice 3 (07 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$.

(1) On suppose que :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \quad (*)$$

(a) Montrer que $\sum_{k=1}^n z_k \neq 0$.

(b) On pose $\theta_k = \arg(z_k)$ et $\theta = \arg\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)$. On rappelle que : $(\theta, \theta_k) \in]-\pi, \pi]^2$.

Montrer que $\sum_{k=1}^n |z_k| [1 - e^{i(\theta_k - \theta)}] = 0$.

(c) En déduire que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $z_k = |z_k| e^{i\theta}$.

(d) Interpréter géométriquement ce résultat.

(2) On suppose qu'il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $z_k = |z_k| e^{i\theta}$.

Montrer l'égalité (*).

(3) Etablir que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ si et seulement si, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe $a_k > 0$ tel que $z_k = a_k z_1$.

Exercice 4 (05 pts)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$.

(1) Soit $(A, B) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$.

(2) Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On se propose de résoudre, dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0_n\}$, l'équation (E) d'inconnu X suivante :

$$(E) : \text{tr}(X)A = \lambda X$$

(a) Résoudre l'équation (E), dans le cas où $\lambda = 0$.

(b) On suppose, dans cette question, que $\lambda \neq 0$.

(i) Montrer que si X vérifie (E), alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $X = \alpha A$ et $\lambda = \text{tr}(A)$.

(ii) Résoudre l'équation (E).